Der supraleitende elliptische Zylinder im longitudinalen Magnetfeld

Von G. U. Schubert

Aus dem Institut für theoretische Physik der Universität Mainz
(Z. Naturforschg. **13 a**, 1021—1025 [1958]; eingegangen am 4. August 1958)

Für einen unendlich langen supraleitenden elliptischen Zylinder im longitudinalen Magnetfeld werden die Londonschen Gleichungen gelöst. Die Lösung wird für dünne elliptische Zylinder diskutiert. Der Grenzübergang zum parabolischen Zylinder wird durchgeführt.

Es gibt eine große Anzahl von Experimenten mit Supraleitern im Magnetfeld, bei denen die Stromverteilung im Supraleiter theoretisch vorausberechnet werden muß. Solche Experimente werden z. B. mit sehr dünnen Drähten oder sehr kleinen Kugeln durchgeführt. Da es erstens zweckmäßig sein kann, mit geometrisch anderen Anordnungen zu arbeiten und zweitens die experimentell unvermeidliche Abweichung von einer geometrisch besonders einfachen Gestalt, z. B. von einem Kreiszylinder, unter Umständen berücksichtigt werden muß, ist es notwendig, geeignete Formeln bereitzustellen.

Nachdem in zwei früheren Arbeiten [1, 2] der elliptische Zylinder im transversalen und der parabolische Zylinder im longitudinalen zeitlich konstanten Magnetfeld nach der Londonschen Theorie durchgerechnet worden ist, erscheint es geboten, den elliptischen Zylinder auch im longitudinalen Feld zu behandeln. Daß man hierzu die Londonsche Theorie verwendet, ist früher [1] schon begründet worden. Die Lösung der Londonschen Gleichungen im Supraleiter und der Potentialgleichung für die Umgebung desselben führte im Falle des elliptischen Zylinders im transversalen Feld auf unendlich viele Gleichungen für die zunächst unbekannten unendlich vielen Koeffizienten, die bei der Entwicklung der Lösung nach geeigneten Funktionen auftraten. Eine brauchbare Lösung dieses Gleichungssystems war nur im Falle des dünnen elliptischen Zylinders möglich. Hier dagegen können die einzuführenden Reihenkoeffizienten explizit angeschrieben werden.

I. Problemstellung und Lösung

Ein unendlich langer supraleitender elliptischer Zylinder befindet sich in einem zeitlich konstanten, homogenen Magnetfeld, dessen Richtung parallel zu den Mantellinien des Zylinders ist. Die Feldstärke H_0 soll so gewählt werden, daß die Supraleitfähigkeit nicht zerstört wird.

Die zum Magnetfeld parallele Symmetrieachse des elliptischen Zylinders sei die z-Achse eines kartesischen x, y, z-Koordinatensystems. Durch

$$(x/a)^2 + (y/b)^2 = 1 \qquad (a \geq b)$$

sei die in der x, y-Ebene liegende Querschnittsellipse definiert. Im Supraleiter besitzt das Magnetfeld aus Symmetriegründen nur eine z-Komponente H_z, die der Gleichung

$$\Delta H_z - \beta^2 H_z = 0 \tag{1}$$

genügen muß. Wir rechnen im Gaussschen Maßsystem, so daß

$$\beta = \sqrt{4\pi/c^2 \lambda} \tag{2}$$

die reziproke Eindringtiefe ist. λ ist die Londonsche Supraleitkonstante.

Die Randbedingung für H_z ist:

$$(H_z)_{\text{Oberfläche}} = H_0 . \tag{3}$$

Dadurch wird die Lösung von (1) eindeutig bestimmt. Die Stromdichte im Supraleiter folgt aus

$$J = \frac{c}{4\pi} \operatorname{rot} \mathfrak{H} . \tag{4}$$

Wegen der hier benützten Bezeichnungen sei auf frühere Arbeiten [1, 2] und auf die Monographie [3] verwiesen. In den Koordinaten des elliptischen Zylinders

$$\begin{aligned} x &= l \operatorname{Cof} \xi \cos \eta , \quad 0 \leq \xi < \infty , \\ y &= l \operatorname{Sin} \xi \sin \eta , \quad 0 \leq \eta < 2\pi , \\ l &= \sqrt{a^2 - b^2} \end{aligned} \tag{5}$$

[1] G. U. Schubert u. H. Schmauch, Z. Phys. **151**, 396 [1958].
[2] G. U. Schubert, Z. Phys. **152**, 59 [1958].
[3] J. Meixner u. F. W. Schäfke, Mathieusche Funktionen und Sphäroidfunktionen, Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1954.

schreibt sich die Differentialgleichung (1):

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2}{\partial \eta^2} - \beta^2 l^2 (\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta)\right] H_z = 0 . \tag{6}$$

Alle auftretenden Funktionen hängen aus Symmetriegründen nicht von z ab.

Mit

$$\xi_0 = \mathfrak{Ar}\,\mathfrak{Cof} \frac{a}{\sqrt{a^2 - b^2}} \tag{7}$$

lautet die Randbedingung für die Lösung von (6):

$$H_z(\xi_0, \eta) = H_0 . \tag{8}$$

Aus der Vektorgleichung (4) wird:

$$J_\xi = \frac{c}{4\pi l} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta}} \frac{\partial H_z}{\partial \eta}, \tag{9}$$

$$J_\eta = - \frac{c}{4\pi l} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta}} \frac{\partial H_z}{\partial \xi} . \tag{10}$$

Der Separationsansatz $H_z = u(\xi)\, v(\eta)$ (11)

liefert, in (6) eingetragen, die gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$\left(\frac{d^2}{d\xi^2} - k - 2q\,\mathfrak{Cof}\, 2\xi\right) u = 0 , \tag{12}$$

$$\left(\frac{d^2}{d\eta^2} + k + 2q \cos 2\eta\right) v = 0 . \tag{13}$$

Dabei ist q eine Abkürzung: $q = (\beta l/2)^2$. (14)

k ist der Separationsparameter. Die Lösungen von (13) sind die MATHIEUschen Funktionen, diejenigen von (12) die modifizierten MATHIEUschen Funktionen *. Die Symmetrieverhältnisse schränken die linear unabhängigen Lösusngen so ein, daß als Lösung von (6)

$$H_z = H_0 \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \,\mathrm{Ce}_{2m}(\xi, -q)\, \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) \tag{15}$$

mit den zunächst unbekannten dimensionslosen Koeffizienten α_m übrigbleibt. Die Randbedingung (8) lautet jetzt

$$1 = \sum_{m=0}^{\infty} \alpha_m \,\mathrm{Ce}_{2m}(\xi_0, -q)\, \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) . \tag{16}$$

Diese Gleichung muß identisch in η erfüllt werden. Mittels der Orthonormierungsbedingungen (vgl. Anm. [3])

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q)\, \mathrm{ce}_{2n}(\eta, -q)\, d\eta = \delta_{mn} \tag{17}$$

können die α_m berechnet werden. Aus den FOURIER-Reihen (s. Anm. [3], S. 187 und 189)

$$\mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) = \sum_{\mu=0}^{\infty} (-1)^{m+\mu} A_{2\mu}^{(2m)}(q) \cos 2\mu\eta \tag{18}$$

liest man sofort

$$\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q)\, d\eta = 2 \cdot (-1)^m A_0^{(2m)}(q) \tag{19}$$

ab, so daß

$$\alpha_m = \frac{2(-1)^m A_0^{(2m)}(q)}{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi_0, -q)} \tag{20}$$

wird. Damit erhält man aus (15):

$$H_z = 2 H_0 \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_0^{(2m)}(q) \frac{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi, -q)}{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi_0, -q)} \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) . \tag{21}$$

Man trägt (21) in (9) und (10) ein:

$$J_\xi = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\lambda}} \frac{2}{\beta l} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_0^{(2m)}(q) \frac{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi, -q)}{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi_0, -q)} \mathrm{ce}'_{2m}(\eta, -q) , \tag{22}$$

$$J_\eta = - \frac{H_0}{\sqrt{4\pi\lambda}} \frac{2}{\beta l} \frac{1}{\sqrt{\mathfrak{Sin}^2 \xi + \sin^2 \eta}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m A_0^{(2m)}(q) \frac{\mathrm{Ce}'_{2m}(\xi, -q)}{\mathrm{Ce}_{2m}(\xi_0, -q)} \mathrm{ce}_{2m}(\eta, -q) . \tag{23}$$

Dabei wurden (22) und (23) mittels (2) so geschrieben, daß eine Vergleichsstromstärke $H_0/\sqrt{4\pi\lambda}$ als Faktor erscheint. Dies ist gerade diejenige Stromdichte, welche an der Oberfläche eines unendlichen Halbraumes auftritt.

Zur Anwendung der strengen Lösung (21), (22), (23) müßte man Tabellen heranziehen. Dies soll jedoch hier unterbleiben. Zunächst eine Bemerkung über den dicken elliptischen Zylinder: Als nullte Näherung wählt man, wie üblich (vgl. Anm. [4]), die

* In der bekannten Formelsammlung von MAGNUS u. OBERHETTINGER [5] wurde diese Funktion „zugeordnete MATHIEUsche Funktionen 1. Art" genannt. In Anm. [1] ist zugeordnet geschrieben worden. MEIXNER u. SCHÄFKE [3] bezeichnen sie als modifiziert.

[4] M. v. LAUE, Theorie der Supraleitung, 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1949.

$$\mathrm{ce}_{2n}\left(\eta, -\frac{\beta^2 l^2}{4}\right) = (-1)^n \mathrm{ce}_{2n}\left(\frac{\pi}{2} - \eta, -\frac{\beta^2 l^2}{4}\right)$$
$$\sim (-1)^n \sqrt[4]{\frac{\pi \beta l}{4}} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} D_{2n}(\sqrt{2\beta l} \sin \eta). \quad (44)$$

Dabei ist D_{2n} eine Funktion des parabolischen Zylinders (vgl. Anm.[5]). Durch analytische Fortsetzung ins rein Imaginäre ergibt sich

$$\mathrm{Ce}_{2n}\left(\xi, -\frac{\beta^2 l^2}{4}\right) = \mathrm{ce}_{2n}\left(i\,\xi, -\frac{\beta^2 l^2}{4}\right) \quad (45)$$
$$\sim (-1)^n \sqrt[4]{\frac{\pi \beta l}{4}} \frac{1}{\sqrt{(2n)!}} D_{2n}(i \sqrt{2\beta l}\, \mathfrak{Sin}\, \xi).$$

Eintragen von (43), (44) und (45) in (42) liefert unter Beachtung von (40) und (41)

$$H_z = \sqrt{2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n\, n!} \frac{D_{2n}(i\,v)}{D_{2n}(i\,v_0)} D_{2n}(u). \quad (46)$$

Dies ist gerade die früher angegebene Lösung für den parabolischen Zylinder im longitudinalen Feld. Dort[2] wurde ferner gezeigt, daß die Lösung für den parabolischen Zylinder diejenige der durch zwei parallele Ebenen begrenzten Platte ergibt, wenn man beim parabolischen Zylinder einen Aufpunkt betrachtet, dessen Abstand vom Brennpunkt groß ist gegen den Parabelparameter p. Damit ist unter Ausnutzung unserer obigen Überlegungen gezeigt, daß man bei einer sehr flachen Querschnittsellipse die Strom- und Feldverteilung der Platte erhält, wenn man Aufpunkte ins Auge faßt, deren Abstände von den Brennpunkten groß gegen b^2/a sind.

[5] W. Magnus u. F. Oberhettinger, Formeln und Sätze für die speziellen Funktionen der mathematischen Physik; 2. Aufl., Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1948.

Über den Verlauf der Bildfehlerkoeffizienten und der Linienverbreiterung entlang der Photoplatte in Massenspektrographen, die Doppelfokussierung erster Ordnung für alle Massen zeigen*

Von L. A. König und H. Hintenberger

Aus dem Max-Planck-Institut für Chemie, Mainz

(Z. Naturforschg. 13 a, 1025—1034 [1958]; eingegangen am 17. Juli 1958)

Mit Hilfe früher abgeleiteter Formeln[1] werden die Bildfehlerkoeffizienten und die Linienverbreiterung durch die Bildfehler entlang der geradlinigen Photoplatte in Massenspektrographen, die Doppelfokussierung erster Ordnung für alle Massen zeigen, berechnet. Die Bildfehlerkoeffizienten werden für Apparate vom Mattauch–Herzogschen Typ, für den Apparat von Reutersward und für einen weiteren Massenspektrographen in Diagrammen wiedergegeben. Für die Berechnung der Linienverbreiterung aus den Bildfehlerkoeffizienten und den Dimensionen der Strahlbegrenzungsblenden werden Formeln abgeleitet und damit für den Mattauch–Herzogschen Apparat Zahlenbeispiele durchgerechnet.

In früheren Arbeiten haben wir die Koeffizienten der vom Öffnungswinkel α und der relativen Geschwindigkeitsabweichung $\beta = \Delta v / v_0$ quadratisch abhängigen Bildfehler in doppelfokussierenden Massenspektrometern und Massenspektrographen, die aus einem elektrischen Radialfeld und aus einem dahintergeschalteten Magnetfeld bestehen, berechnet[1] und daraufhin sowohl Massenspektrometer[2–4] als auch Massenspektrographen[5, 6] mit korrigierten Bildfehlern angegeben. In dieser Arbeit werden die früher abgeleiteten Formeln[1] dazu benutzt, um in den bisher gebauten doppelfokussierenden Massenspektrographen den Verlauf der Bildfehlerkoeffizienten und der Linienverbreiterung durch die Bildfehler entlang der Photoplatte zu berechnen.

1. Die allgemeinen Gleichungen über den Verlauf der Bildfehlerkoeffizienten längs der Photoplatte

Zunächst ist eine kleine Abänderung der bisher veröffentlichten Formeln zweckmäßig. In unseren

[1] H. Hintenberger u. L. A. König, Z. Naturforschg. 12 a, 140 [1957].

* Vorgetragen auf der Physikertagung 1958 in Essen.

[2] H. Hintenberger u. L. A. König, Z. Naturforschg. 12 a, 443 [1957].

[3] H. Hintenberger u. L. A. König, Z. Naturforschg. 12 a, 773 [1957].

[4] H. Hintenberger u. L. A. König, Z. Naturforschg. 13 a, 236 [1958].

[5] L. A. König u. H. Hintenberger, Nucl. Instrum. 3, 133 [1958].

[6] H. Hintenberger u. L. A. König, Nucl. Instrum., im Druck.